Universidade Federal de Mato Grosso
Pedro Sánchez - Cálculo Zero
26 de maio de 2025

Funções

1 Domínio e Imagem

No nosso dia a dia, é fácil perceber que o valor de uma coisa depende diretamente de outra. Por exemplo: quanto mais tempo um motorista fica no trânsito, maior será o consumo de combustível do carro. Da mesma forma, quanto mais horas um aluno dedica aos estudos, melhor costuma ser seu desempenho nas provas. Também podemos pensar na conta de luz, que aumenta conforme cresce o consumo de energia na residência. Em todas essas situações, quando sabemos o valor de uma dessas informações, conseguimos descobrir o valor da outra, que está ligada a ela. Por isso, dizemos que uma grandeza é função da outra, ou seja, o valor de uma depende diretamente do valor da outra.

Definição 1.1. *Sejam X e Y dois conjuntos não vazios. Uma função de X em Y é uma lei, regra ou correspondência que associa a um elemento x de X um único elemento y de Y.*

Em geral, uma função é denotada da seguinte forma

$$\boxed{f : X \to Y,}$$

onde f é a regra que associa a $x \in X$ um único elemento $y \in Y$.

O único elemento y de Y associado ao elemento x de X é chamado de **valor da função em** x e é representado por

$$\boxed{y = f(x).}$$

Além disso, o elemento x recebe o nome de **variável independente**, enquanto y é chamado de **variável dependente**, pois seu valor depende de x.

Exemplo 1.2. *Sejam $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e $Y = \{a, b, c, d, e\}$. Então, $f : X \to Y$ definida por $f(1) = b$, $f(2) = a$, $f(3) = d$ e $f(4) = d$ é uma função.*

Exemplo 1.3. *Sejam $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e $Y = \{a, b, c, d, e\}$. Então, $g : X \to Y$ definida por $g(1) = b$, $g(1) = c$, $g(2) = a$, $g(3) = e$, não é uma função, pois ao elemento $1 \in X$ estão associados dois elementos distintos b e $c \in Y$, o que viola a definição de função.*

Definição 1.4. *Quando X, $Y \subset \mathbb{R}$, diremos que $f : X \to Y$ é uma função real de variável real.*

Exemplo 1.5. *As seguintes expressões representam funções reais de variável real:*

$$f(x) = 3x + 1 \quad e \quad g(x) = x^2 + 2x + 1.$$

A cada função f estão associados dois subconjuntos fundamentais para a análise de seu comportamento. Chamamos **domínio da função** o conjunto D_f, definido por

$$\boxed{D_f = \{x \in X : \ y = f(x)\}}$$

e chamamos de **imagem da função** o conjunto Im_f, definido por

$$\boxed{Im_f = \{y \in Y : \ y = f(x)\}.}$$

Exemplo 1.6. *No Exemplo 1.2, temos que $D_f = \{1, 2, 3, 4\}$ e $Im_f = \{a, b, d\}$.*

Na prática, no caso de uma função real de variável real f, determinar o domínio D_f significa descobrir quais números reais podem ser usados no lugar de x sem que $y = f(x)$ apresente problemas. Ou seja, consiste em encontrar o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ para o qual $y = f(x) \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1.7. *Determinar o domínio de*

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-2}.$$

Solução. Como o numerador contém uma raiz quadrada, o radicando não pode ser negativo. Portanto, é necessário que:

$$x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2.$$

Além disso, o denominador não pode ser zero, pois não existe divisão por zero:

$$x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$$

Assim, o domínio da função é o conjunto dos números reais maiores ou iguais a -2, exceto o número 2. Portanto:

$$D_f = [-2, 2[\cup] - 2, +\infty[.$$

□

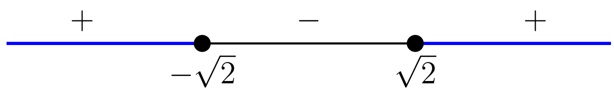
Para determinar a imagem Im_f de uma função real de variável real f, começamos considerando as condições que o x deve satisfazer, ou seja, seu domínio. A partir disso, impomos restrições sobre o $y = f(x)$ de acordo com a relação entre x e y, de modo a descrever todos os valores que $f(x)$ pode assumir.

Exemplo 1.8. *Determinar o domínio e a imagem de*

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2}.$$

Solução. Como a expressão dentro da raiz deve ser maior ou igual a zero:

$$x^2 - 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) \geq 0.$$



Portanto, o domínio de f é:

$$D_f =] - \infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[.$$

Para determinar a imagem, observamos que, para qualquer $x \in D_f$,

$$x^2 - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2} \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \in [0, +\infty[$$

Portanto, a imagem da função é:

$$Im_f = [0, +\infty[$$

. □

Outra forma de determinar a Im_f de uma função real de variável real $y = f(x)$ consiste em expressar a variável x em função de y e, em seguida, analisar quais valores y pode assumir.

Exemplo 1.9. *Determinar a imagem de*

$$f(x) = \frac{1}{x-1}.$$

Solução. Isolando x em função de y:

$$y = \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow yx - y = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1+y}{y}.$$

Essa expressão define um valor real de x para todo $y \neq 0$. Portanto,

$$Im_f = \mathbb{R} \setminus 0.$$

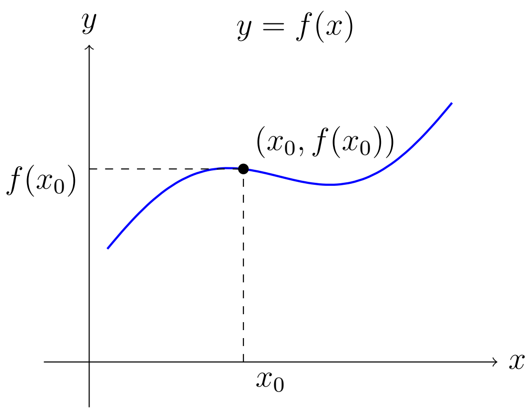
□

2 Gráficos

As funções reais de variável real são representadas geometricamente por meio de seu gráfico, que é definido da seguinte maneira:

Definição 2.1. *O gráfico de uma função real de variável real $f : X \to Y$ é o subconjunto $G_f \subset \mathbb{R}^2$, formado pelos pares ordenados $(x_0, f(x_0))$, onde $x_0 \in D_f$, ou seja,*

$$\boxed{G_f = \{(x_0, f(x_0)) : x_0 \in D_f\}.}$$



A seguir, serão apresentadas e estudadas algumas das funções mais utilizadas no cálculo.

Definição 2.2. *Sejam a, $b \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, a função*

$$\boxed{f(x) = ax + b \quad ou \quad y = ax + b,}$$

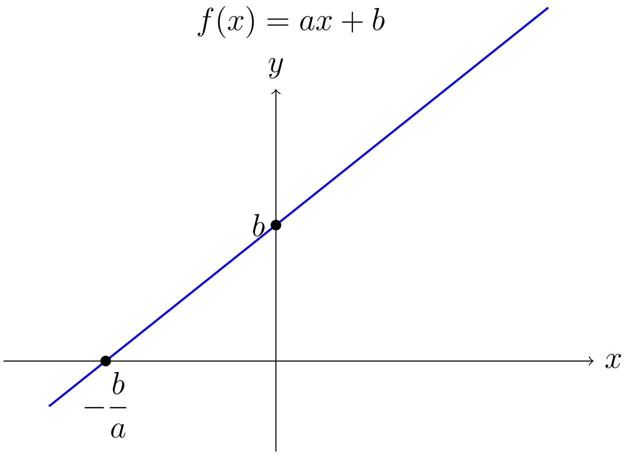
é denominada **função afim**.

Por exemplo,

$$y = 3, \; y = 2x \text{ e } y = 3x + 1$$

são funções afins.

O gráfico de uma função afim é uma reta. Por exemplo, se $a > 0$ e $b > 0$, então o gráfico é uma reta crescente que intercepta o eixo y no ponto $(0, b)$ e o eixo x no ponto $(-b/a, 0)$.



Observe que, uma função afim é definida para todo número real, pois a expressão $ax + b$ não possui nenhuma restrição. Portanto,

$$\boxed{D_f = \mathbb{R}}$$

Além disso, isolando x em função de y:

$$y = ax + b \Leftrightarrow x = \frac{y-b}{a}.$$

percebemos que não há nenhuma restrição sobre os valores de y, já que qualquer valor real de y corresponde a um valor real de x. Assim,

$$\boxed{Im_f = \mathbb{R}}.$$

Definição 2.3. *Sejam a, b, $c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, a função*

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c \text{ ou } y = ax^2 + bx + c}$$

é denominada **função quadrática**.

Por exemplo, as funções

$$y = x^2, \ y = x^2 + 4x, \text{ e } y = 3x^2 + 2x + 3$$

são quadráticas.

Como uma função quadrática é definida para todo número real, já que expressão $ax^2 + bx + c$ não possui restrições, seu domínio é:

$$\boxed{D_f = \mathbb{R}}$$

Para determinar o gráfico e a imagem de uma função quadrática, utilizamos o método de completar quadrados:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}. \end{aligned}$$

Assim, o gráfico de uma função quadrática é uma parábola com vértice no ponto

$$\boxed{V = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right).}$$

Alternativamente, pode-se expressar como:

$$\boxed{V = \left(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a})\right).}$$

Observamos que o termo quadrático satisfaz

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0.$$

Assim, o sinal do coeficiente a determina o comportamento da função e, consequentemente, sua imagem:

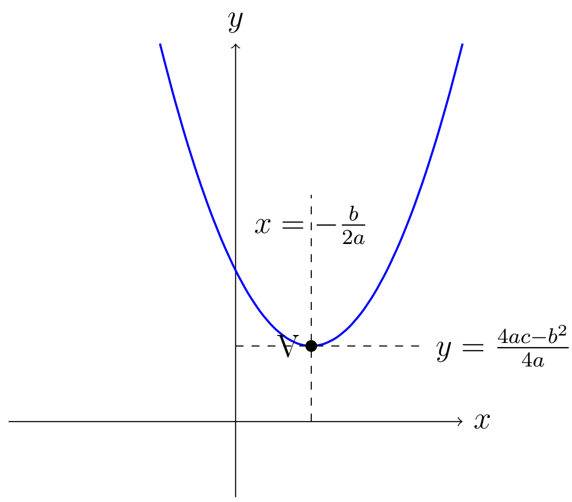
1. Se $a > 0$,

$$f(x) \geq \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Portanto,

$$\boxed{Im_f = \left[\frac{4ac - b^2}{4a}, +\infty\right[.}$$

e seu gráfico é



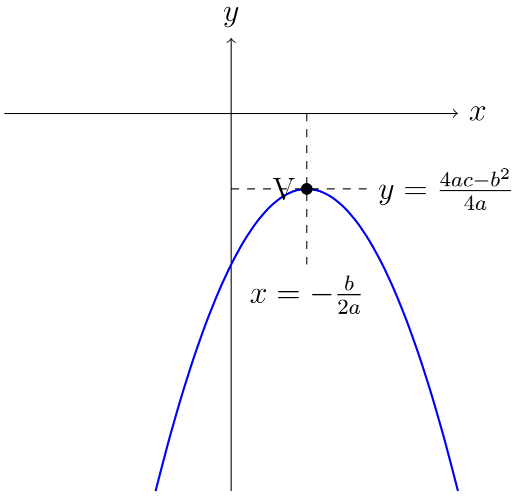
2. Se $a < 0$,

$$f(x) \leq \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Portanto,

$$\boxed{Im_f = \left]-\infty, \frac{4ac - b^2}{4a}\right].}$$

e seu gráfico é



Definição 2.4. *Os zeros ou raízes de uma função quadrática são os valores $x \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = 0$.*

Assim, utilizando o método de completar quadrados,

$$\begin{aligned} 0 &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}. \end{aligned}$$

Daí, isolamos o quadrado:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Isolando x, obtemos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Fazendo

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

temos os seguintes casos:

1. Se $\Delta > 0$, a função quadrática possui duas raízes reais e distintas, dadas por

$$\boxed{x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.}$$

2. Se $\Delta = 0$, a função quadrática possui uma raiz real dupla, isto é, as duas raízes coincidem:

$$\boxed{x = -\frac{b}{2a}.}$$

3. Se $\Delta < 0$, a função quadrática não possui raízes reais. Nesse caso, seu gráfico não intersecta o eixo x, pois as raízes são números complexos.

Exemplo 2.5. *Determine o domínio, a imagem, o vértice e faça um esboço do gráfico da função $f(x) = x^2 - 6x + 8$.*

Solução. Como $f(x)$ é uma função quadrática, temos:

$$D_f = \mathbb{R}.$$

Identificando os coeficientes $a = 1$, $b = -6$ e $c = 8$, calculamos o vértice:

$$V = \left(-\frac{(-6)}{2(1)}, \frac{4(1)(8) - (-6)^2}{4(1)}\right) = (3, -1).$$

Além disso, a imagem da função é dada por:

$$Im_f = \left[\frac{4(1)(8) - (-6)^2}{4(1)}, +\infty\right[= [-1, +\infty[.$$

Sendo

$$\Delta = (-6)^2 - 4(1)(8) = 4$$

as raízes da função quadrática são:

$$x_1 = \frac{-(-6) + \sqrt{4}}{2} = 4$$

e

$$x_2 = \frac{-(-6) - \sqrt{4}}{2} = 2$$

Portanto, o gráfico da função é uma parábola voltada para acima, que intercepta o eixo x nos pontos $(0, 2)$ e $(0, 4)$. □

3 Exercícios

1. Dê o domínio e esboce o gráfico.

    a) $f(x) = 3x$
    b) $g(x) = -x$
    c) $h(x) = -x + 1$
    d) $f(x) = 2x + 1$
    e) $g(x) = -2x + 3$
    f) $g(x) = 3$

2. Considere a função f dada por $f(x) = x^2 + 4x + 5$.

    a) Mostre que $f(x) = (x + 2)^2 + 1$
    b) Determine o domínio e a imagem de f
    c) Esboce o gráfico de f
    d) Qual o menor valor de $f(x)$? Em que x este menor valor é atingido?

Referências

[1] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um Curso de Cálculo: Volume 1.* 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015.

[2] STEWART, James. *Cálculo, Volume I.* 5. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.